



On Diophantine exponents for non-Archimedean fields

著者	Ooto Tomohiro
発行年	2017
その他のタイトル	非アルキメデス体上のDiophantine exponentについて
学位授与大学	筑波大学 (University of Tsukuba)
学位授与年度	2016
報告番号	12102甲第8011号
URL	http://hdl.handle.net/2241/00147717

氏 名	大音智弘
学 位 の 種 類	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	博 甲 第 8011 号
学 位 授 与 年 月 日	平 成 29 年 3 月 24 日
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
審 査 研 究 科	数 理 物 質 科 学 研 究 科
学 位 論 文 題 目	

On Diophantine exponents for non-Archimedean fields
(非アルキメデス体上の Diophantine exponent について)

主 査	筑波大学教授	学術博士	秋山茂樹
副 査	筑波大学講師	博士(数理科学)	木村健一郎
副 査	筑波大学教授	理学博士	宮本雅彦
副 査	筑波大学准教授	博士(理学)	佐垣大輔

論 文 の 要 旨

ディオファントス近似論は数論の歴史的分野で、実数を有理数(または代数的数)で近似するときの近似の速度により代数的であることを特徴づける。特に Roth の定理と Schmidt の部分空間定理は数論の二つの金字塔であり、代数的数を代数的数で近似する速度が超越数よりも必ず遅くなることを示して、どちらも Fields 賞を得ている。このような近似の速度を定量化したものが本論文のタイトルにある Diophantine Exponent である。Mahler と Koksma は Diophantine Exponent により実数の分類を与えている。初等関数の特殊値など具体的に与えられた数の Diophantine Exponent を求める問題は数論の難問に属しており、超越数論、ディオファントス近似論などと一般に呼ばれている。

本論文では実数体のかわりに非アルキメデスの付値体、特に p 進体や有限体上の冪級数体での Diophantine Exponent が定義され、さらにこれをもとに自然に定義される Mahler-Koksma 型の分類が研究対象とされている。数論には局所的情報をすべて集めて、そこから大域的な結果を導くという基本的原理があり、非アルキメデスの付値体での結果は局所的情報に当たる。したがって非アルキメデスの付値体での研究は数論の未来を占う様な結果を導くことが期待される。たとえば abc 予想は非アルキメデスの付値体では簡単に証明でき、その実数版の成立が大問題として現在問われている。本論文では、非アルキメデスの付値体上の Diophantine Exponent という問題が取り上げられ、数々の基本的な結果とともに特に実数体で成立している結果の類似物が幾つか示されている。

数を代数的数で近似する問題では、多項式の値をどの程度小さくできるかという基準で近似する方法と、代数的数との差を付値の意味でどの程度小さくできるかという基準で考える方法の異なる二つの Diophantine Exponent の定義が可能である。有理数での近似の場合には二つの概念は一致するが、高

次の場合には必ずしも一致しない。それどころか、二つの Exponent の差はある非空な区間の任意の値を取りうる。この博士論文では、この定義の差異に関して非アルキメデスの付値体で実数体での結果の類似物を示し、さらに高次の Diophantine exponent が与えられた次数まで一定値をとるような数を構成した。

この論文では単に非アルキメデスの付値体での類似を追うだけでなく、非アルキメデスの付値体での新しい問題点を提起している。非アルキメデスの付値体では一般的には問題が易しくなることが期待されているが、本論文はそのような状況に一定のアンチテーゼ、または警告を与える結果が示されている。特に非分離拡大の存在が Diophantine Exponent に与える影響が自明ではないことが注意されている。

審 査 の 要 旨

〔批評〕

本論文では非アルキメデスの付値体での Diophantine Exponent に関する基礎付けに関する詳しい考察が行われ、実数体での類似物がどこまで成立するのかを根気よく綿密に調べられている。非アルキメデスの付値体は易しいという先入観もあるところだが、実際に手を動かしてやってみると、非分離拡大の存在などで実数体よりも証明が難しくなる場合も多くみられた。第一に Mahler-Koksma の分類は Diophantine Exponent が異なれば見かけ上異なるものになるが実数体の場合、本質的に差異は生じない。しかし非アルキメデスの付値体の場合には、このことを直ちに示すことはできず、若干の困難が生じることは指摘されている。第二に、二つの Diophantine Exponent の違いが非分離元の場合には微妙な差異を生む可能性が示されている。このような未解決部分の定式化とその提示は、関連研究者の興味を集めており、今後の研究の発展のために大変重要な一歩である。

論文で用いられている手法は非常に多岐にわたっているが主要には Schmidt の部分空間定理とその発展形、無理回転のコード化であるスツルム列、言語理論で用いられるオートマトンと対応したオートマチック列、 p 進連分数による二次近似の構成、代数的な元でありながら非常に近似の良い元の存在などである。最後にのべた良い近似を持つ代数的元の存在は有限体上の冪級数体に特有な現象で、Roth の定理の類似が成立しなくなる原因でもある。

具体的に与えられた数の良い近似列を構成し、様々な事実を示すという一種シンプルな目的のために、実に様々なアイデアが分野横断的に必要とされるところは数論の学問としての魅力を強く感じさせる論文となっている。

〔最終試験結果〕

平成 29 年 2 月 17 日、数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について 50 分間の説明を求め、さらに関連事項につき詳しい質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。